EL CONJUNTO DE VELOCIDADES RELATIVISTAS I (-C, C) , JUNTO CON LA OPERACIÓN $V1 \circ V2 = \frac{\beta 1 + \beta 2}{1 + \beta 1 \beta 2}$ TIENE ESTRUCTURA DE GRUPO ABELIANO

PROFESOR DE FISICA DEL LICEO BOSTON: Ricardo Daniels

RESUMEN : El siguiente articulo tiene como propósito demostrar partiendo de las transformaciones de Lorentz la operación $\circ$ suma de velocidades relativistas ,y además que esta operación junto con el intervalo I(-c, c) tiene estructura de grupo Abeliano.

PALABRAS CLAVES : Grupo, grupo Abeliano, transformaciones de lorentz.

1.**INTRODUCCION:** Las leyes de la física que gobiernan el comportamiento de campos y partículas están expresadas en términos de coordenadas espacio temporales, dichas leyes deben ser independientes del sistema de referencia utilizado para hacer las mediciones, esto quiere decir que aunque dos observadores en sus respectivos sistemas de referencia obtengan distintos registros, las leyes que gobiernan el mundo natural deben ser las mismas en los diferentes sistemas, por lo tanto deben existir un conjunto de transformaciones que les permita pasar de un sistema a otro garantizando la invarianza de la ley. En la teoría especial de la relatividad son las transformaciones de lorentz las que garantizan el postulado fundamental sobre el carácter absoluto de la velocidad de la luz.

2. **DEFINICION DE GRUPO**: Un conjunto A con una operación * tiene estructura de grupo si para todo x_i que $\in$ A se satisfacen las siguientes propiedades

2.1 $x * (y * z) = x * (y * z)$ asociativa

2.2 $\exists e \in A, \forall x_i \in A, e * x_i = x_i * e = x_i$ idéntica

2.3 $\forall x_i, \exists y \in A, x * y = y * x = e$ inversa

2.4 $x * y = y * x$ conmutativa

Si el conjunto con la operación satisface 2.1 , 2.2 , 2.3 se tiene una estructura de grupo, si además satisface 2.4 el grupo es abeliano y esta es la mejor estructura que podemos tener con una operación.

3. **TRANSFORMACIONES DE LORENTZ** : Las trasformaciones de lorentz relacionan sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante uno con respecto al otro , garantizando la independencia de la velocidad de la luz con respecto al movimiento relativo.

Consideremos un sistema de coordenadas κ^1 que se mueve con velocidad constante v en la dirección x con respecto a otro sistema de referencia κ^0. Un punto físico P tendrá coordenadas x respecto a κ^0 y x' con respecto a κ^1.Entonces

$$x' = \gamma(x' - vt) \qquad t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2})$$

Si multiplicamos la segunda expresión por c y las escribimos en forma matricial obtenemos.

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Siendo la matriz asociada a la transformación de lorentz.

$$f(v) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v/c \\ -\gamma v/c & \gamma \end{bmatrix}$$

Se demostrara que la composición de dos transformaciones de lorentz da como resultado otra transformación de lorentz ,esto quiere decir que si una partícula se mueve con velocidad v_2 con respecto al sistema de referencia κ^0 entonces cual será la velocidad de esta partícula con respecto a al sistema κ^1. si

$\chi' = \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$ entonces $\chi' = f(v_1)\chi$, luego $\chi'' = f(v_2)\chi'$

Por lo tanto $\chi'' = f(v_2)f(v_1)\chi$

Desarrollando $f(v_2)f(v_1)$ obtenemos

$$\gamma_2\gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Explicitando la expresión anterior

$$\frac{1}{\sqrt[2]{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}} \begin{bmatrix} 1+\beta_1\beta_2 & -(\beta_1+\beta_2) \\ -(\beta_1+\beta_2) & 1+\beta_1\beta_2 \end{bmatrix}$$

Tomando como factor común $1+\beta_1\beta_2$

$$\frac{1+\beta_1\beta_2}{\sqrt[2]{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{(\beta_1+\beta_2)}{1+\beta_1\beta_2} \\ -\frac{(\beta_1+\beta_2)}{1+\beta_1\beta_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Introduciendo $1+\beta_1\beta_2$ dentro de la expresión radical

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}{(1+\beta_1\beta_2)^2}}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{(\beta_1+\beta_2)}{1+\beta_1\ \ \beta_2} \\ -\frac{(\beta_1+\beta_2)}{1+\beta_1\beta_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Completando cuadrados dentro de la expresión radical llegamos finalmente a

$$\frac{1}{\sqrt[2]{1-\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{(\beta_1\beta_2)^2}}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{(\beta_1+\beta_2)}{1+\beta_1\ \ \beta_2} \\ -\frac{(\beta_1+\beta_2)}{1+\beta_1\beta_2} & 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera llegamos a la operación suma de velocidades relativistas la cual podemos expresar como

$\beta_1 * \beta_2 = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$ $(\beta_1 * \beta_2) * \ \beta_3 = \frac{\beta_1+\beta_2)+\beta_3}{1+(\beta_1\beta_2)\beta_3} = \frac{\beta_1+(\beta_2+\beta_3)}{1+\beta_1(\beta_2\beta_3)} = \beta_1 * (\beta_2 * \beta_3)$

El próximo paso es demostrar que dicha operación con el intervalo de velocidades relativistas (-c , c) satisface las propiedades de un grupo abeliano veamos asociatividad

$$(\beta_1 * \beta_2) * \ \beta_3 = \frac{\beta_1+\beta_2)+\beta_3}{1+(\beta_1\beta_2)\beta_3} = \frac{\beta_1+(\beta_2+\beta_3)}{1+\beta_1(\beta_2\beta_3)} = \beta_1 * (\beta_2 * \beta_3)$$

elemento idéntico si $\beta_2 = 0 \Rightarrow v_2 = o$

$$\beta_1 * \beta_2 = \beta_1 * 0 = \frac{0+\beta_1}{1+0\beta_1} = \beta_1$$

El inverso es $-v \Longrightarrow -\beta$ luego

$$\beta * -\beta = \frac{\beta+(-\beta)}{1+\beta(-\beta)} = 0$$

conmutatividad

$$\beta_1 * \beta_2 = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2} = \frac{\beta_2+\beta_1}{1+\beta_2\beta_1} = \beta_2 * \beta_1$$

con esto queda demostrado que el intervalo de velocidades relativistas (-c, c) con la operación $*$ forma un grupo abeliano